Devoir surveillé de Mathématiques n°7

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 **(calcul de l'inverse d'une matrice)**

On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $(M - I_3)^2 = 3(M - I_3)$, en déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 2 **(noyau et image d'un endomorphisme)**

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathcal{K}er(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$, $\mathcal{K}er(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont-ils supplémentaires ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{K}er(f \circ f)$ et $\mathcal{I}m(f \circ f)$, $\mathcal{K}er(f \circ f)$ et $\mathcal{I}m(f \circ f)$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3 **(calcul des puissances d'une matrice)**

On note $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Montrer qu'il existe trois vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, $f(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v}$ et $f(\overrightarrow{w}) = 3\overrightarrow{w}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $D = \underset{\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}\ f$.
3. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
4. En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (une égalité de Taylor-Lagrange)

1. Énoncer le *théorème de Rolle*.
2. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^2([a;b],\mathbb{R})$ avec $a < b$.
   (a) Montrer que si $g \in \mathcal{C}^2([a;b],\mathbb{R})$ vérifie $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ et $g'(a) = f'(a)$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $g''(c) = f''(c)$.
   (on pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f - g$)
   (b) Déterminer l'unique fonction g polynomiale de degré 2 telle que $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ et $g'(a) = f'(a)$.
   (c) En déduire qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.
3. Déterminer la position de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à l'une quelconque de ses tangentes.

Exercice 5 (homographies et matrices)

1. On appelle *homographie*, une fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc \neq 0$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition d'une homographie.
   (on pourra distinguer différents cas)
   (b) Montrer qu'une homographie f est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
   (c) Démontrer que la composée $f \circ g$ de deux homographies f et g est une homographie.
2. On appelle *matrice d'homographie*, une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc \neq 0$.
   (a) Montrer que le produit MN de deux matrices d'homographie M et N est une matrice d'homographie.
   (b) Montrer qu'une matrice d'homographie est inversible et que son inverse est une matrice d'homographie.